MATEMÁTICA

Las funciones cuadráticas son utilizadas en algunas disciplinas como, por ejemplo, Física y Economía. Son útiles para describir movimientos con aceleración constante, trayectorias de proyectiles, ganancias y costos de empresas, y obtener así información sin necesidad de recurrir a la experimentación.

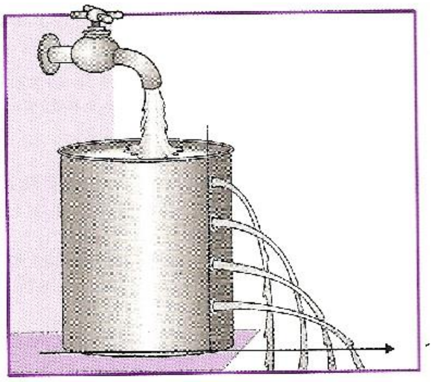
El objetivo propuesto es que conozcas la definición de esta función, estudiar las propiedades y poder resolver problemas!!!

Espero que te asombres y que aprendas cada día más con este nuevo tema.

Función Cuadrática

Realizaremos un experimento curioso.

Conseguí una lata de conservas vacía y hacerle varios agujeros iguales como aparecen en la ilustración. Luego coloca la lata sobre una canilla abierta de forma tal que la lata se mantenga siempre llena, sin rebasar.



Observá que lo chorros de agua que salen de los distintos agujeros llegan más lejos cuanto más bajo está el orificio. Esta fuerza de salida es función de la altura en que se encuentra el agujero. Las curvas que describen los chorros de agua reciben el nombre de **parábolas.**

Cuando un jugador de tenis golpea la pelota, o cuando un niño arroja un juguete, dichos objetos describen una curva que se aproxima a una parábola, en las fotografías veras algunos ejemplos.


McDonald's

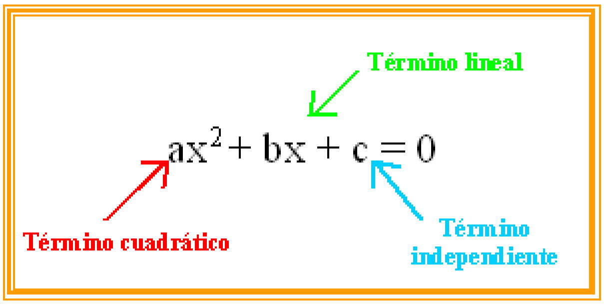
El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 3 pies de diámetro: el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente.

Las fórmulas de las funciones que se representan mediante una parábola se llaman **funciones cuadráticas,** y su fórmula tiene la forma:

$$\boxed{f(x) = a x^2 + b x + c}$$

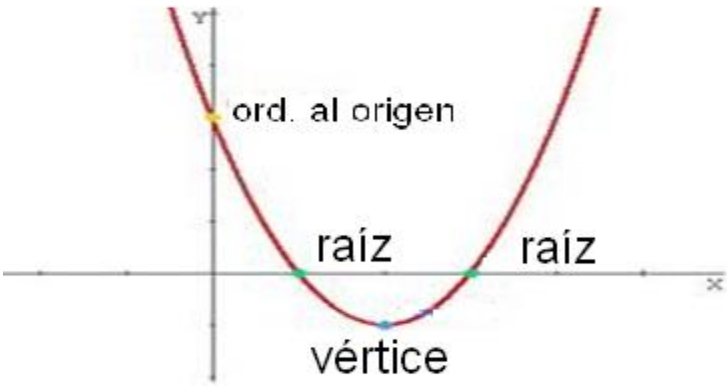
con a, b y c pertenecientes a los reales y $a \neq 0$, es una función cuadrática y su gráfico es una curva llamada parábola.

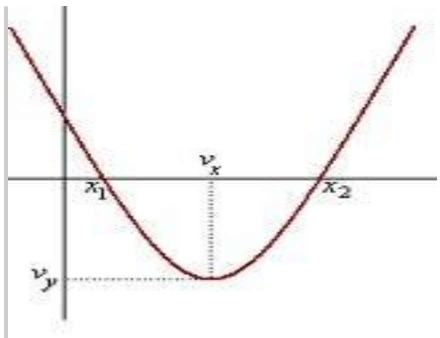
En la ecuación cuadrática sus términos se llaman:



Si la ecuación tiene todos los términos se dice ecuación completa, si a la función le falta el término lineal o independiente se dice que la ecuación es incompleta.

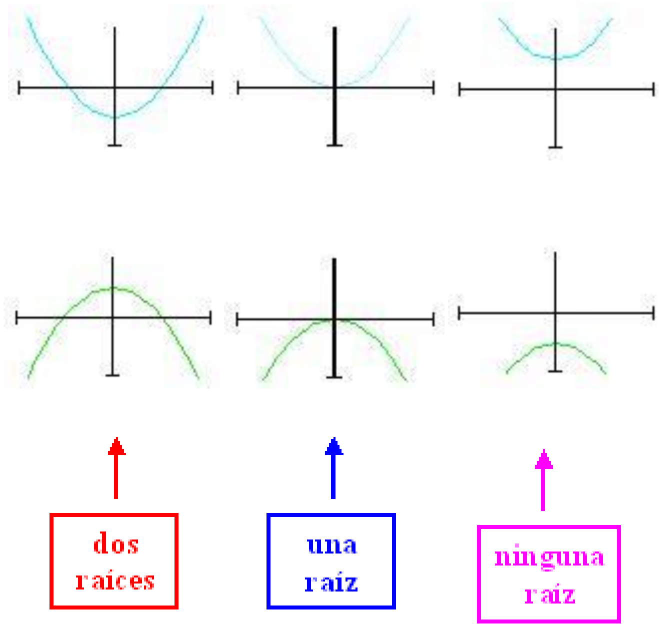
Estas curvas tienen ciertos elementos que la identifican como veremos en el siguiente gráfico:





Raíces

Las *raíces* (o ceros) de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0, es decir los valores de x tales que y = 0. Gráficamente corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x. Podemos ver a continuación que existen parábolas que cortan al eje x en:

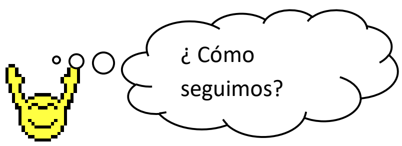


Para poder calcular las raíces de cualquier función cuadrática calculamos f (x) = 0, entonces

$ax^2 + bx + c = 0$

Pero para resolver **$ax^2 + bx + c = 0$** observamos que no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, ésta tiene la particularidad de poseer un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante. Entonces, para resolverla podemos hacer uso de la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Al resultado de la cuenta $b^2 - 4ac$ se lo llama *discriminante de la ecuación,* esta operación presenta distintas posibilidades:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ tenemos dos soluciones posibles.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ el resultado de la raíz será 0, con lo cual la ecuación tiene una sola solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la raíz no puede resolverse, con lo cual la ecuación no tendrá solución real.

Entonces, si la ecuación esta completa ya sabemos cómo calcular las raíces (con la fórmula) y si la ecuación es incompleta solo basta despejar la variable x de la ecuación:

Vértice

El vértice de la parábola está ubicado sobre la recta de simetría, de modo que su coordenada x, que notaremos x_v vale:

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Conocida la coordenada *x* de un punto, su correspondiente coordenada *y* se calcula reemplazando el valor de x en la expresión de la función.

En el vértice se calcula el máximo (o el mínimo) valor de la función de acuerdo a que la parábola tenga sus ramas para abajo o para arriba (*lo veremos a continuación*).

Si la parábola no tiene raíces el vértice se puede calcular utilizando los coeficientes de la función de la siguiente manera:

Paso a paso te mostraré cómo debes analizar las funciones cuadráticas. SIEMPRE DEBES SABER…

EL TÉRMINO CUADRÁTICO **a** (es el número que acompaña a x^2)

EL TÉRMINO LINEAL **b** (es el número que a la x)

EL TÉRMINO INDEPENDIENTE **c** (es el número que no tiene x)Empecemos:

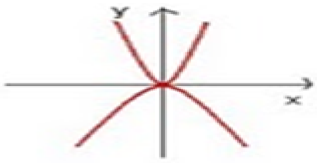
- Funciones de la forma: $\boldsymbol{y = a.x^2}$

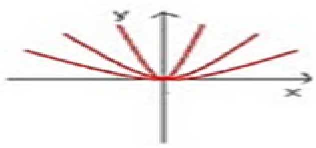
a>0 la parábola "va" hacia arriba.

a<0 la parábola "va" hacia abajo

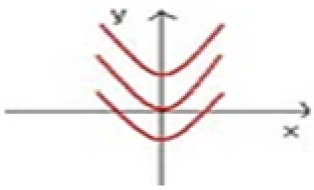
0<a<1 la parábola se abre

a>1 la parábola se cierra



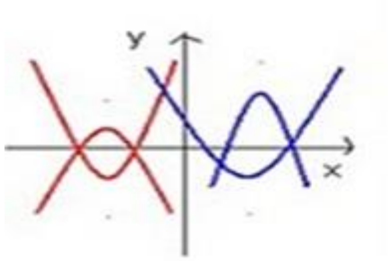


- Funciones de la forma: $\boldsymbol{y = x^2 + c}$



Si **a** y **b** tienen el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia la izquierda.

Si **a** y **b** tienen distinto signo, la gráfica se desplaza hacia la derecha.



Ahora veremos un ejemplo para que veas cómo se aplica:

Ejemplo 1: Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza la pelota, medida desde el suelo en metros, en función del tiempo, medido en segundos, se calcula a través de la siguiente fórmula: $h(t) = -5t^2 + 20t$

Responder:

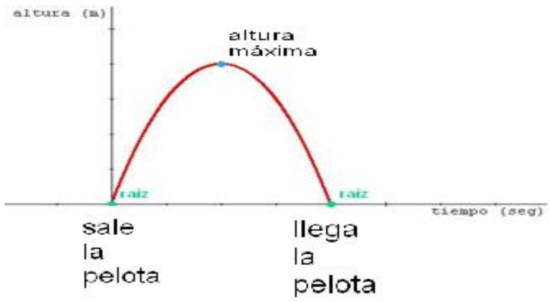
a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace?

b) ¿Después de cuánto tiempo cae la pelota al suelo?

c) ¿Cómo se contestan las preguntas anteriores si la pelota se lanza a 25m del suelo?

Ahora te explicaré paso a paso, como debes resolverlo, para que no te quedes con ninguna duda.

Primero analicemos la situación planteada, el problema dice que se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba pero sabemos que por acción de la gravedad de la tierra la pelota debe regresar.



Empecemos a contestar las preguntas:

La primera nos pide que hallemos la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace. O sea, tenemos que averiguar el vértice y sus respectivas coordenadas v = (x_v , y_v), cada una de ellas me dará x_v = el tiempo en que alcanza la altura máxima y y_v = la altura máxima.

Para hallar el vértice podemos utilizar dos posibilidades:

- Como tenemos raíces, podemos calcularlas y luego calcular el vértice.
- La segunda opción es usar la fórmula que permite calcular el vértice.

Utilizaré para calcular el vértice la segunda opción. Entonces, en la fórmula reemplazaré las variables por los valores de la función que que estamos analizando.

función: $h(t) = -5t^2 + 20t$.

$a = -5$; $b = 20$ y $c = 0$, reemplazo en la fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-20}{2.(-5)}$$

$$x_v = \frac{-20}{-10}$$

$$x_v = 2$$

Calculé x_v , ahora tengo que calcular y_v pero como ya tenemos el valor de x lo reemplazo en la función para obtener el valor de y. Entonces quedaría así:

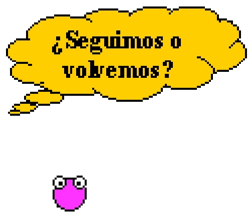
$$h(2) = -5(2)^2 + 20(2)$$

$$h(2) = -5 . 4 + 40$$

$$h(2) = -20 + 40$$

$$h(2) = 20.$$

Ahora si podemos responder la pregunta: *la altura máxima que alcanza la pelota es de 20 m a los 2 segundos de ser lanzada*.



La siguiente pregunta es después de cuánto tiempo cae la pelota en el suelo. Lo que tenemos que averiguar es una de las raíces de la parábola. Ya que, el movimiento empieza en el suelo y termina en el suelo, dicho de otra manera empieza en el eje x y termina en el eje x (raíces).

Para hallar las raíces igualamos la función a cero y obtenemos:

$$-5t^2 + 20t = 0$$

$$t\,(-5t + 20) = 0 \quad \text{factor común}$$

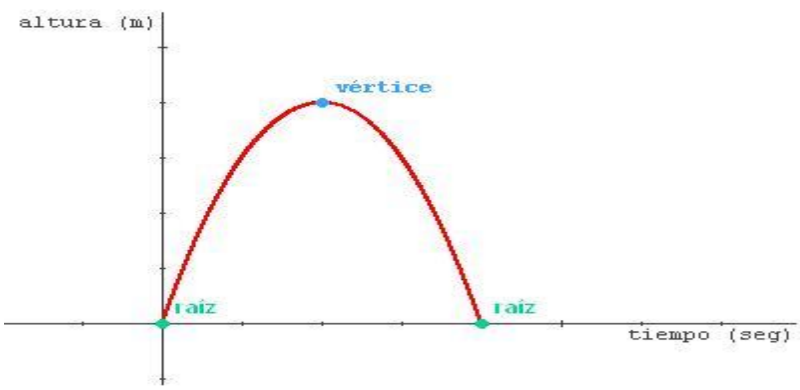
$$t = 0 \quad \text{o} \quad -5t + 20 = 0 \quad \text{producto igual a 0}$$

$$-5t = -20 \quad \text{despejamos t}$$

$$t = 4$$

Calculamos las dos raíces t = 0 y t =4, pero nuestra respuesta es t =4 nos indica que la pelota cae al piso luego de 4 segundos.

Nos falta contestar la última pregunta la cual dice que contestemos las preguntas anteriores pero ahora la pelota es lanzada desde 25 m del suelo. La trayectoria de la pelota podemos representarla por la siguiente parábola:



Notamos ya con el gráfico que hay una diferencia y es que en la parábola anterior c = 0m en cambio en ésta c = 25m. Entonces la nueva función que tenemos que analizar es h (t) = $-5t^2 + 20t + 25$.

Ahora respondamos nuevamente las dos primeras preguntas:

Para calcular la altura máxima y en que momento lo hace, nuevamente tenemos que calcular x_v,

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x = -1$$

y para calcular y_v tenemos que reemplazar el valor en la nueva función:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25.$$

$$h(2) = -5(2)^2 + 20.2 + 25.$$

$$h(2) = 45.$$

Ahora, respondemos la primera pregunta: l*a máxima altura que alcanza son 45 m., alcanzando esa altura a los 2 segundos.*

La pregunta dos nos preguntaba: ¿ después de cuánto tiempo la pelota cae al suelo?

Como ya sabemos tenemos que igualar la función a cero.

$$-5t^2 + 20t + 25 = 0$$

Para resolver tenemos que usar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

reemplazamos

$$x_1, x_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.(-5).25}}{2.(-5)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 500}}{-10}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{-10}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-20 \pm 30}{-10} \qquad x_1 = \frac{-20 + 30}{-10} \qquad x_2 = \frac{-20 - 30}{-10}$$

$x_1 = 1$ $\qquad x^2 = 5$

Por el contexto del problema, el valor negativo no tiene sentido: *la pelota cae al piso después de 5 segundos.*

Actividades N°1

Halla las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

Debes utilizar la fórmula $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

a)$6x^2 - 2 = 0$

b) $4x^2 - 12 + 5 = 0$

c)$x^2 - 2x + 10 = 0$

d)$x^2 - 6x + 7 = 0$

Actividades N°2

Grafica las siguientes funciones cuadráticas. Indica: Vértice, Raíces, INterseccion con el eje y, eje de simetría, máximo o mínimo.

a)$x^2 + 3x + 2$

b) $x^2 - 9$

Actividades N°3

<u>Platea y resuelve:</u>

a) Supongamos que la temperatura de un cierto día de la ciudad de Córdoba luego de t horas pasada la medianoche está dada por la función:

$$T(t) = \frac{-1}{4}t^2 + 4t + 10^\circ C$$

a) Graficar la temperatura en función del tiempo.

b) ¿Cuál fue la temperatura a las 2 de la mañana?

c) ¿A qué hora la temperatura fue máxima?

b) Se arroja un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80m/seg. Su altura en función del tiempo se puede aproximar por la fórmula:

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 80t \ metros$$

a) Graficar la función h (t).

b) ¿Cuánto tiempo dura el movimiento ascendente?

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

d) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

e) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde su partida cuando se encuentra a 277,5 m de altura?

<u>Trabajo Práctico</u>

Actividades N°1

Halla las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

Debes utilizar la fórmula $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

a)$-3x^2 = 0$

b) $x^2 - 1x - 5 = 0$

c)$2x^2 + 2x + 5 = 0$

d)$x^2 - 9 = 0$

Actividades N°2

Grafica las siguientes funciones cuadráticas. Indica: Vértice, Raíces, Intersección con el eje y, eje de simetría, máximo o mínimo.

a)$-x^2 + 3x + 4$

b) $-x^2 + 2x$